

Několik dalších ukázek:

Exponenciální rovnice

1. Řešte v R: a) $5^{x+1} \cdot 25^{x-3} = 125^{2x-1}$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{5-x} = \left(\frac{9}{4}\right)^{x+2}$

c) $7^{x+3} = 5$

d) $2^{x^2+2x-3} = 1$

e) $3^{x+1} + 3^x = 2$

f) $16^x - 4^x = 2$

g) $\sqrt[4]{3^{x+3}} \cdot \sqrt[2]{3^{x-2}} \cdot \sqrt[8]{9} = 9$

S₁: a) na každé straně rovnice musí být základ 5, aby se pak základy mohly vynechat

b) využijeme věty $a^{-1} = \frac{1}{a}$

c) nelze-li rovnici upravit na stejný základ, logaritmujeme obě strany rovnice

d) využijeme věty $a^0 = 1$

e) využijeme pravidla pro součin mocnin o témže základu $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$

f) využijeme substituce $4^x = a$

g) upravíme obě strany rovnice na stejný základ 3, využijeme věty $\sqrt[r]{a^s} = a^{\frac{s}{r}}$

$$\mathbf{S_2 : a) } 5^{x+1} \cdot 5^{2(x-3)} = 5^{3(2x-1)}$$

$$\mathbf{b) } \left(\frac{2}{3}\right)^{5-x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2(x+2)}$$

$$\mathbf{c) } (x+3) \log 7 = \log 5$$

$$\mathbf{d) } 2^{x^2+2x-3} = 2^0$$

$$\mathbf{e) } 3 \cdot 3^x + 3^x = 2$$

$$\mathbf{f) } (4^x)^2 - 4^x - 2 = 0$$

$$\mathbf{g) } 3^{\frac{x+3}{4}} \cdot 3^{\frac{x-2}{2x}} \cdot 3^{\frac{2}{8}} = 3^2$$

$$\mathbf{S_3 : a) } 5^{x+1+2x-6} = 5^{6x-3}$$

$$\mathbf{b) } 5 - x = -2x - 4$$

$$\mathbf{c) } x + 3 = \frac{\log 5}{\log 7}$$

$$\mathbf{d) } x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\mathbf{e) } 4 \cdot 3^x = 2$$

$$\mathbf{f) } a^2 - a - 2 = 0, (a-2)(a+1) = 0$$

$$\mathbf{g) } \frac{x^2 + 3x + 2x - 4 + x}{4x} = 2$$

2. Řešte v R exponenciální rovnice:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \sqrt{27}$

b) $2 \cdot 3^x = 11$

c) $10^{2x-3} = -5$

d) $4 \cdot 2^{\frac{3}{x-1}} = 0,125^{3-x}$

e) $3^x + 3^{x-1} = 108$

f) $9^x - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$

S₁: a) využij věty $\frac{1}{3} = 3^{-1}$ a $\sqrt{27} = 27^{\frac{1}{2}}$

b) logaritmuj obě strany rovnice, použij pravidel pro logaritmování mocniny a součinu

c) využij definičního oboru pro log. funkce

d) uprav na stejný základ obě strany rovnice

e) využij pravidla $a^r : a^s = a^{r-s}$

f) využij substituce $3^x = a$

S₂ : a) $3^{-x} = 3^{1,5}$

b) $3^x = 5,5$

c) $(2x-3)\log 10 = \log (-5)$

d) $2^{2+\frac{3}{x-1}} = 2^{-3(3-x)}$

e) $3^x + \frac{3^x}{3} = 108$

f) $a^2 - 8a - 9 = 0$

S₃ :

b) $x \cdot \log 3 = \log 5,5$

c) $2x-3 = \emptyset$

d) $\frac{2x-2+3}{x-1} = -9+3x$

e) $3 \cdot 3^x + 3^x = 108 \cdot 3$

f) $(a-9)(a+1) = 0$

3. Řešte logaritmické rovnice v R:

a) $\log(4x+2) - \log(3-x) = 1$

b) $\log(x-1) + \log(x+1) - 3\log 2 = \log(x-2)$

c) $\log^2 x - 3\log x - 10 = 0$

d) $\frac{1 + \log x}{2 - \log x} = \frac{2}{3}$

e) $\frac{\ln(x+2)}{\ln(x-1)} = 2$

S₁: a) využij věty o logaritmování podílu, $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$

b) využij vět o logaritmování součinu a mocniny

c) využij substituce $\log x = a$

d) využij křížového pravidla, odstraň zlomky

e) zbav se zlomku, neopomeň podmínky řešitelnosti

S₂: a) $\log \frac{4x+2}{3-x} = \log 10$

b) $\log \frac{(x-1)(x+1)}{2^3} = \log(x-2)$

c) $a^2 - 3a - 10 = 0$

d) $3(1 + \log x) = 2(2 - \log x)$

e) $\ln(x+2) = 2 \cdot \ln(x-1)$

S₃: a) $4x + 2 = 10(3 - x)$

b) $x^2 - 1 = 8(x - 2)$

c) $\log x = 5$, $\log x = -2$

d) $5 \cdot \log x = 1$

e) $x + 2 = (x - 1)^2$

4. Řešte v R:

a) $\log_4 x = -1,5$

b) $\log(4,5 - x) + \log x = \log 4,5$

c) $\log_2 x - \log_2 \sqrt{x} + \log \frac{1}{x} = 1$

d) $1 + \log x^3 = \frac{10}{\log x}$

S₁: a) využij definice, $\log_a x = y \rightarrow a^y = x$

b) $\log a + \log b = \log(a \cdot b)$

c) $\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$

d) $\log x^n = n \cdot \log x$

S₂: a) $(4)^{-1,5} = x$

b) $\log x \cdot (4,5 - x) = \log 4,5$

c) $\log_2 \frac{x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{x} = \log_2 2$

d) $(1 + 3 \cdot \log x) \cdot \log x = 10$

S₃: a) $2^{2 \cdot (-1,5)} = x$

b) $x^2 - 4,5x + 4,5 = 0$

c) $\frac{1}{\sqrt{x}} = 2$

d) $3 \log^2 x + \log x - 10 = 0$

5. Řešte v R goniometrické rovnice:

a) $6 \cos^2 x + \sin x - 5 = 0$

b) $\operatorname{tg} x - 2 = 3 \operatorname{cotg} x$

c) $\cos x + \frac{1}{\cos x} = 2$

d) $\sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cdot \cos x = 0$

e) $(\sin x + \cos x)^2 \cdot (\sin x - \cos x)^2 = 1 - \cos 2x$

S₁: a) využij věty $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, vyjádři $\cos^2 x$

b) využij věty $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$

c) využij substituce $\cos x = a$, zbav se v rovnici zlomku

d) vytkni z rovnice $\sin x$

e) umocni závorky a využij základních vět o goniometrických funkcích

S₂: a) $6(1 - \sin^2 x) + \sin x - 5 = 0$

b) $\operatorname{tg} x - 2 = \frac{3}{\operatorname{tg} x}$

c) $\cos^2 x - 2\cos x + 1 = 0$

d) $\sin x(\sin x + \sqrt{3} \cos x) = 0$

e) $1 - \cos 2x =$

$(\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x)(\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x)$

S₃:a) $6\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$, $\sin x = a$

b) $\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 3 = 0$, $\operatorname{tg} x = a$

c) $a^2 - 2a + 1 = 0$

d) $\sin x = 0$, $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

e) $(1 + \sin 2x)(1 - \sin 2x) = 1 - \cos 2x$

$1 - \sin^2 2x = 1 - \cos 2x$
 $4\cos^4 x - 2\cos^2 x - 1 = 0$

6. Řešte v \mathbb{R} :

a) $\operatorname{tg}\left(\frac{3x}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$

b) $2 \cdot \sin x + \frac{3}{\sin x} + 5 = 0$

c) $\sin x + \sin 2x = 0$

d) $\cos x - \cos 2x = 0$

S₁: a) využij substituce, nahraď závorku např. α , urči α_0 pro $\sqrt{3}$,

b) využij substituce $\sin x = a$, zbav se v rovnici zlomku,

c) využij vzorce pro dvojnásobný úhel, $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$,

d) využij $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$\mathbf{S}_2: a) \operatorname{tg} \alpha_0 = \sqrt{3}, \alpha_0 = 60^\circ + k\pi$$

$$\mathbf{S}_3: a) \alpha = 180^\circ - \alpha_0, \frac{3x}{4} - 60^\circ = 120^\circ + k\pi$$

$$b) 2a^2 + 5a + 3 = 0$$

$$b) a_1 = -1, a_2 = -1,5$$

$$c) \sin x(1 + 2\cos x) = 0$$

$$c) \sin x = 0, \quad 1 + 2\cos x = 0$$

$$d) \cos x - \cos^2 x + \sin^2 x = 0$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$d) 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0, \quad \cos x = a$$

7. Jsou dány body A[-2; -2], B[3 ;1], C[1; 4].

- Urči obvod trojúhelníka ABC,
- urči obsah trojúhelníka,
- urči velikosti vnitřních úhlů trojúhelníka,
- urči velikost výšky v_c ,
- urči rovnici výšky v_c v obecném tvaru,
- urči velikost těžnice t_b ,
- urči rovnici těžnice t_b ve směrnicovém tvaru,
- urči souřadnice těžiště trojúhelníka,
- urči poloměr opsané kružnice trojúhelníku r ,
- urči poloměr kružnice trojúhelníku vepsané ρ .

\mathbf{S}_1 : a) načrtni trojúhelník v pravoúhlém souřadném systému, obvod je roven součtu velikosti stran trojúhelníka;

- využij Heronův vzorec, nebo proved' výpočet s užitím determinantu;
- urči složky vektorů \mathbf{AB} , \mathbf{AC} a využij vztahu pro výpočet úhlu dvou vektorů;
- jedná se o vzdálenost bodu C od strany AB;
- výška v_c je kolmá na přímkou AB, využij pravidlo kolmosti přímek, kolmice prochází bodem C;
- těžnice je spojnice vrcholu a středu protilehlé strany;
- parametrický tvar rovnice přímky-těžnice převed' na obecný tvar a z něj vyjádři y ;
- těžiště trojúhelníka leží v jedné třetině vzdálenosti od strany trojúhelníka;
- využij sinové věty;
- využij vztahu mezi obsahem trojúhelníka a polovinou obvodu trojúhelníka

$$\mathbf{S}_2: a) |\mathbf{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}, \text{ obdobně vypočítej } |\mathbf{BC}|, |\mathbf{AC}|;$$

$$b) S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad s = 0,5 \text{ obvodu trojúhelníka, nebo } \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = S$$

$$c) \mathbf{AB} = (x_B - x_A), (y_B - y_A), \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2, \quad |\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

d) přímka AB: $x = x_A + (x_B - x_A) \cdot t$, $y = y_A + (y_B - y_A) \cdot t$, $v = \frac{a \cdot x_C + b y_C + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

e) $ax + by + c = 0$, kolmice $-bx + ay + c_1 = 0$

f) $S_{BC} = x_S = (x_A + x_C) : 2$, $y_S = (y_A + y_C) : 2$

g) viz d)

h) $x_T = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$ stejným způsobem y_T

i) a urči viz a), α viz c), $\frac{a}{\sin \alpha} = 2r$

j) $\rho = S : s$

S₃: a) $|AB| = \sqrt{5^2 + 3^2}$

b) $S = 0,5(x_1 y_2 + y_1 x_3 + x_2 y_3 - x_3 y_2 - x_1 y_3 - x_2 y_1)$

c) $\mathbf{AB}(5;3)$, $\mathbf{AC}(\quad)$, $\cos \alpha = \frac{AB \cdot AC}{|AB| \cdot |AC|}$

d) $x = -2 + 5t$, $y = -2 + 3t$, převed' na obecný tvar a dosad' do vztahu $v =$ viz d)

e) $3x - 5y - 4 = 0$, pro kolmici platí $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$

f) $B_1[-0,5; 1]$, $t_b : x = 3 - 4,5t$, $y = 1 + 0t$

g) $y = k \cdot x + q$, $k =$, $q =$

h) $x_T = \frac{-2 + 3 + 1}{3}$, $y_T =$

i) $|a| = |BC| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} =$, sinus úhlu α určíme pomocí c)

j) urči podíl S a s , viz a) a b)

8. Diagram:

1. Na obrázku vidíš kruhový diagram.

Vymysli si situaci, kterou lze popsat na základě diagramu. Napiš krátkou povídku o diagramu.

2. Vymysli matematickou úlohu týkající se diagramu.

3. Přečti svou povídku sousedovi v lavici a nech ho úlohu vyřešit.

4. Seznam se s úlohou sestavenou sousedem a připravte si prezentaci.